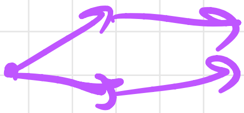
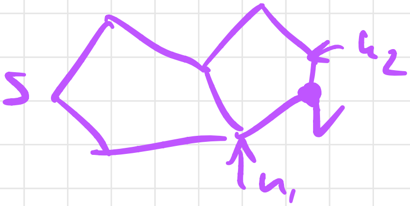
# Bellman – Ford

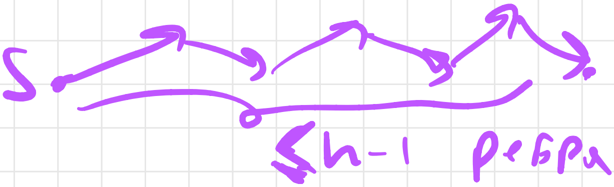
Bellman 1958
Ford 1956
Shimbel 1955

SSSP

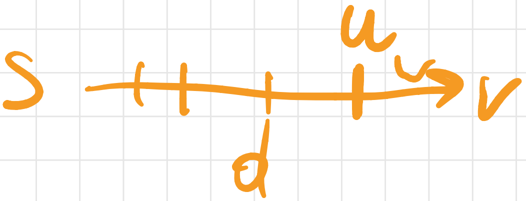
w бывают отрицат.







$dp_{d,v}$ = кр. расстояние от s до v по ровно d рёбрам



$$dp_{d,v} = \min_{(u,v)\in E} dp_{d-1,u} + w_{u,v}$$

$O(VE)$

$d \leq V, \quad v \in V \quad \Rightarrow V^2$ сост

fix $d$: $E$ переходов $\Rightarrow$ всего $VE$ переходов

$dp_{*,*} = \infty$

$dp_{0,s} = 0$

```
for $d = 1 .. n-1$:
    for $v \in V$
        for $(u, w_{vu}) \in adj[v]$:
            $dp_{d,u} = \min(dp_{d,u}; dp_{d-1,v} + w_{vu})$
```

$O(VE)$

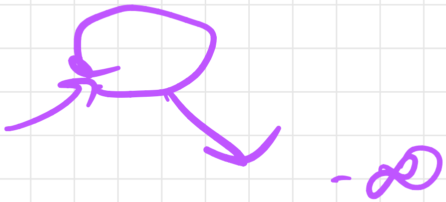
## Upgrade

```
$dp_* = \infty$
$dp_s = 0$
for $d = 1 \dots n-1$:
    for $v \in V$
        for $(u, w_{vu}) \in adj[v]$:
            $dp_u = \min(dp_u ; dp_v + w_{vu})$
```

for $(v, u, w_{uv})$

$O(VE)$

Утв: $dp_v = \min$ по всем путям $s \to v$ длины $\leq d$ и м.б. ещё некоторым путям большей длины.



# Поиск отр. цикла.

Утв: Если отр. цикла нет, то при $d \geq n$, у нас не будет релакс.

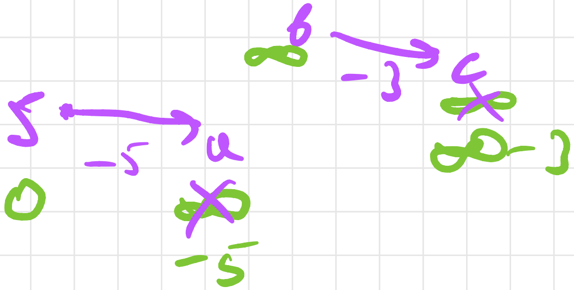
Утв: Если $C$ − отр. цикл, то на любой итерации $d$ $\exists v \in C$, что $v$ релаксируется (*)

(*) − если $\forall v \in C$ $d_v \neq \infty$

$\infty - 5 = \infty$

$\infty \text{"="} \underbrace{10^{18}}$

$\infty - 5 \neq \infty$



```
for $v \in V$
    for $(u, w_{vu}) \in adj[v]$:
        $dp_u = \min(\overset{\infty}{dp_u} ;$
        $\infty - 3 \Leftarrow \underset{\infty}{dp_v} + \underset{-3}{w_{vu}})$

if $dp_v \neq \infty$
```

Алгоритм проверки отр. цикла.

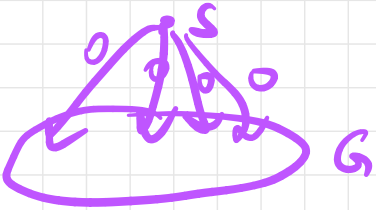
1) $dp = 0$

2) запустить Б-Ф $d = 1..n-1$

3) запустить Б-Ф $d = n$,

и если что-то срелаксир.

$\rightsquigarrow$ отр. цикл существует

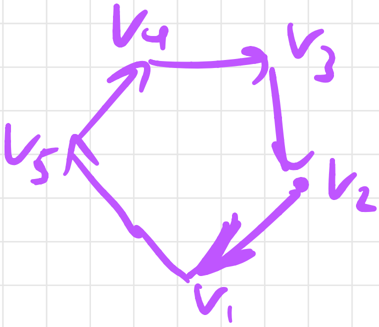


Д-во: утв:

↙ отр. цикл

пусть $C = v_1 \dots v_k$

пусть ничего не срелакс.



$$dp_{v_1} \leq dp_{v_2} + w_{v_2 v_1}$$

$$dp_{v_2} \leq dp_{v_3} + w_{v_3 v_2}$$

$$\dots$$

$$dp_{v_5} \leq dp_{v_1} + w_{v_1 v_5}$$

Сумма: $$0 \leq \sum_{v_{k+1}=v_1} w_{v_{i+1}, v_i}$$

# Восстановление пути

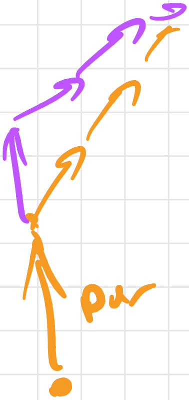
1) $dp_{d,v}$ ; $par_{d,v}$

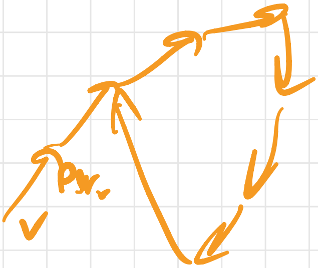
$v^2$ $v^2$

2) $par_v$

$$\left.\begin{aligned} &\text{if } dp_u > dp_v + w_{vu} \\ &dp_u = dp_v + w_{vu} \end{aligned}\right\} \text{экв.}$$

$par_u = v$





① = почему цикла не возникает

② почему восст. ответа вернёт нужный

Восст. ответа

$$v \to par_v \to par_{par_v} \to \ldots \to s$$

② Утв: после релакс:

$$dp_v = dp_{par_v} + w_{par_v, v}$$

Рассмотрим последний момент, когда релакс. $v$:

$$dp_v \geqq dp_{par_v} + w_{par_v, v}$$

Пусть $dp_v > dp_{par_v} + w_{par_v, v}$

в конце алгоритма.

неверно

$\Downarrow$

$dp_v$ можно срелакс!

$\Downarrow$

$dp_v$ посчитано неверно.

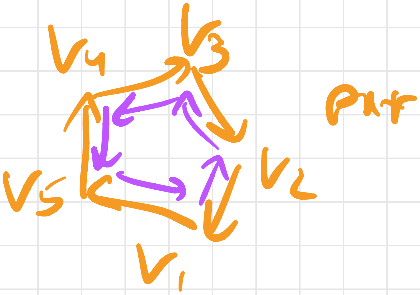
① Пусть нет отр. цикла в G

$\Downarrow$

ссылки par не обр. цикл.

$$dp_v \geq dp_{par_v} + w_{par_v, v}$$

Пусть есть цикл по предкам



$$\begin{cases} dp_{v_1} \geq dp_{v_2} + w_{v_2, v_1} \\ dp_{v_2} \geq dp_{v_3} + w_{v_3, v_2} \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ dp_{v_s} \geq dp_{v_1} + w_{v_1 v_s} \end{cases}$$

$$0 \geq \sum w_{v_{i+1}, v_i}$$

$$\Rightarrow \sum w_{v_{i+1}, v_i} < 0$$

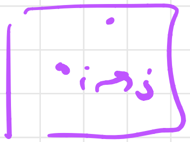
$\Rightarrow$ противоречие с тем что нет отр. цикла.

# floyd-Warshall

floyd 1962
warshall 1962
Roy 1959

APSP

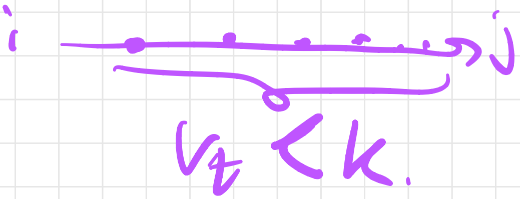
All-Pairs



G.

$V(G) = 0..n-1$

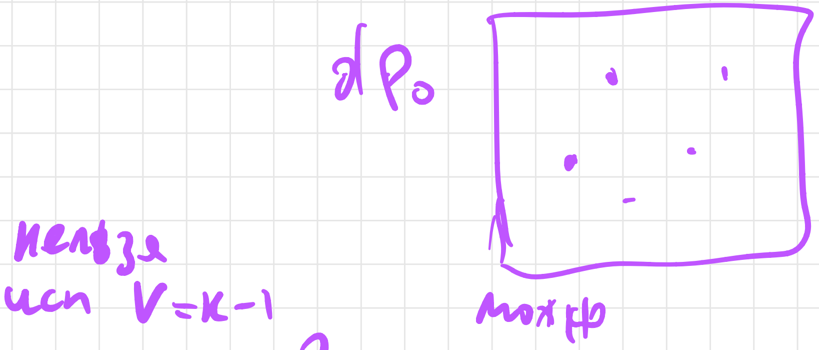
$dp_{k,i,j}$ = кр. путь от i до j
проходящий по верш.
$< k$.



$dp_{n,i,j}$

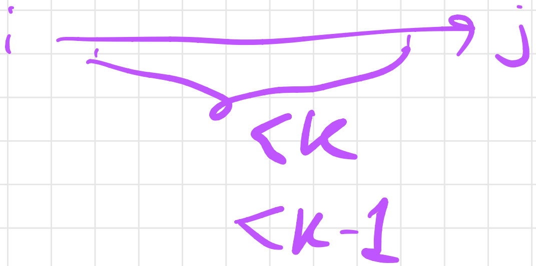
$dp_{0,i,j} = w_{i,j}$ если $(i,j) \in E$

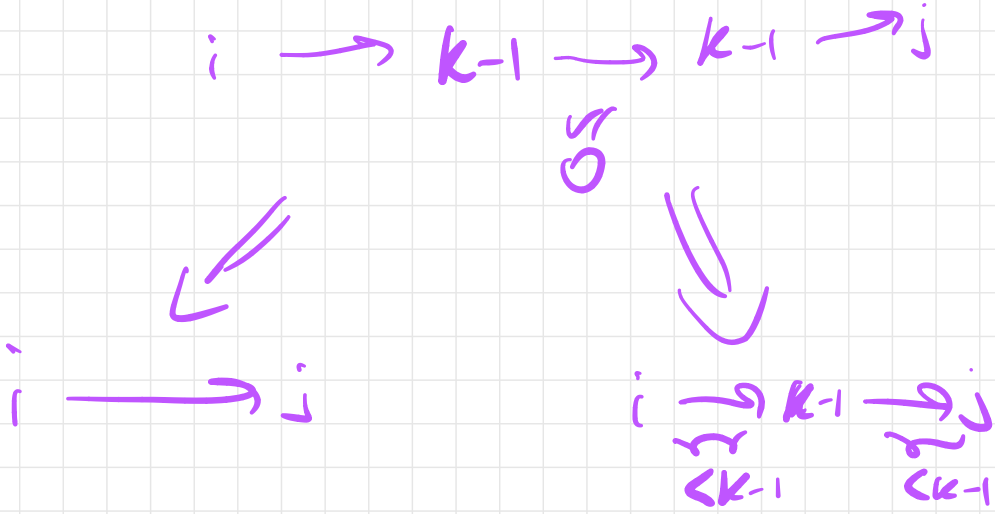
и $\infty$ иначе



$$dp_{k-1} \xrightarrow{?} dp_k$$

$$dp_{k,i,j} = \min( dp_{k-1,i,j},$$
$$dp_{k-1,i,k-1} + dp_{k-1,k-1,j})$$





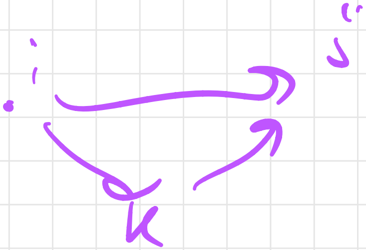
```
$dp_{*,*,*} = \infty$
$dp_{0,i,j} = w_{ij}$    for  $(i,j) \in E$

for  $k = 1 .. n$:
    for  $i = 0 .. n-1$
        for  $j = 0 .. n-1$:
            $dp_{k,i,j} = \min( . . .$
.. $dp_{k-1,i,j}$; $dp_{k-1,i,k-1} + dp_{k-1,k-1,j})$
```

## Upgrade:

$dp_{*,*} = \infty$

$dp_{i,j} = w_{ij}$ для $(i,j) \in E$

```
for k = 0..n-1:
    for i = 0..n-1
        for j = 0..n-1:
            $dp_{i,j} = \min($...
$dp_{i,j}$ ; $dp_{i,k} + dp_{k,j})$
```



$O(V^3)$

```
if $dp_{ij} > dp_{ik} + dp_{kj}$
    $dp_{ij} = dp_{ik} + dp_{kj}$
    $par_{ij} = k$
```

## ① Восст. ответа

Ⓐ $par_{i,j} = k$.

$$i \longrightarrow j$$

$$\Downarrow$$

$$i \to k + k \to j$$

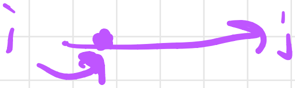
Ⓑ $par'_{i,j}$ = первая в-на на пути $i \to j$

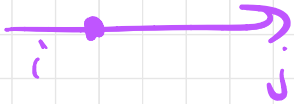
$$i \to \underset{\substack{\Downarrow \\ v}}{par'_{i,j}} \to par'_{v,j} \to \dots$$

$$\dots \to j$$

$$dp_{i,j} \leftarrow dp_{i,k} + dp_{k,j}$$

$$par'_{i,j} = par'_{i,k}.$$





$i \to k \quad k \to j$

## ② отр. циклы.

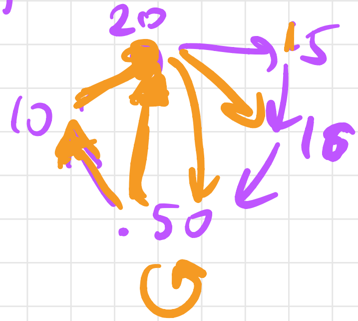
Утв: v лежит на ~~простом~~ отр. цикле

$$\Updownarrow$$

$$dp_{v,v} < 0.$$

Д-во: $dp_{v,v} \leftarrow dp_{vk} + dp_{kv}$ $(\Uparrow)$

$(\Downarrow)$:



③ перемножение

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  | -1 | -1 | -1 | -1 |
| -1 |  | -1 | -1 | -1 |
| -1 | -1 |  | -1 | -1 |
| -1 | -1 | -1 |  | -1 |
| -1 | -1 | -1 | -1 |  |

dp

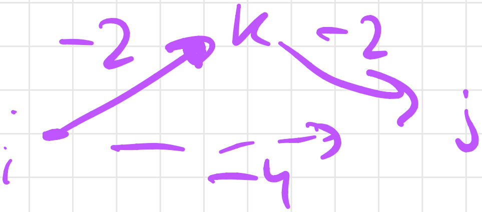
k=0

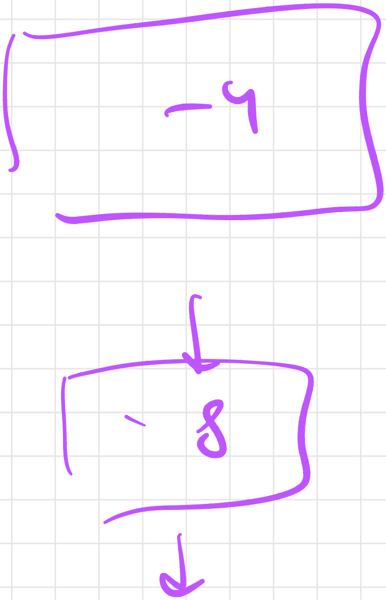
$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "-1"] \arrow[rr, dashed, bend right] & k \arrow[r, "-1"] & j \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow -2$

|  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|
|  | ? | ? | ? | ? ? |
| ? |  | -2 | -2 | -2 |
| ? | -2 |  | -2 | -2 |
| ? | -2 | -2 |  | -2 |
| ? | -2 | -2 | -2 |  |

$k=1$





$$M = -10^{18}$$

$$dp_{ij} = \min(dp_{ij}, dp_{ik} + dp_{kj})$$

$$dp_{ij} = \max(dp_{ij}, M)$$